Ejercicios de Análisis Funcional

Relación 3 - Operadores y funcionales lineales continuos

1. Sea $T:\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^N$ el operador lineal que en la base usual tiene asociada la matriz $A=\big(a_{ij}\big)_{(i,j)\in N\times N}$. Pongamos $F_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{iN})$, $C_j=(a_{ij},a_{2j},\dots,a_{Nj})$.

   a) Se considera en $\mathbb{K}^N$ la norma $\|\cdot\|_\infty$. Prueba que la norma de T viene dada por
   $$\|T\|=\text{máx}\{\|F_i\|_1:1\leqslant i\leqslant N\}.$$

   b) Se considera en $\mathbb{K}^N$ la norma $\|\cdot\|_1$. Prueba que la norma de T viene dada por
   $$\|T\|=\text{máx}\left\{\|C_j\|_1:1\leqslant j\leqslant N\right\}.$$

   c) Se considera en $\mathbb{K}^N$ la norma euclídea $\|\cdot\|_2$. Prueba que
   $$\|T\|\leqslant\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

   Da un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ en que la desigualdad anterior sea estricta.

2. Sean X e Y espacios normados y $T:X\to Y$ una aplicación lineal. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) T es sobreyectiva y existen números $\alpha>0$, $\beta>0$ tales que $\alpha\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant\beta\|x\|$ para todo $x\in X$.

   b) T es inyectiva y $\alpha B_Y\subset T(B_X)\subset\beta B_Y$.

   c) T es un isomorfismo topológico de X sobre Y y $\|T\|\leqslant\beta$, $\|T^{-1}\|\leqslant 1/\alpha$.

3. Sean X e Y espacios normados y sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L(X,Y)$ que converge puntualmente. Sea $T:X\to Y$ la función límite puntual, es decir, $Tx=\text{lím}\{T_nx\}$ para todo $x\in X$. Prueba que $T\in L(X,Y)$ y que $\{T_n\}$ converge a T en $L(X,Y)$.

4. Sea X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores en $L(X,Y)$ que está acotada. Prueba que el conjunto
   $$M=\{x\in X:\{T_nx\}\text{ es convergente}\}$$
   es cerrado.

5. Sea T un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y con la propiedad de que para toda sucesión $\{x_n\}\to 0$ en X se verifica que $\{Tx_n\}$ está acotada. Prueba que T es continuo.

6. Sea X un espacio normado y $f : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal discontinuo. Sean

$$A = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \geqslant 0\}, \quad B = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) < 0\}$$

Prueba que A y B son conjuntos convexos no vacíos, que $\operatorname{Lin}(A) = \operatorname{Lin}(B) = X$ y ambos son densos en X.

7. Sea $T : c_0 \to \ell_1$ el operador lineal definido para todo $x \in c_0$ por

$$[Tx](n) = \frac{x(n)}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calcula su norma y prueba que T no la alcanza. ¿Qué puedes decir si el mismo operador se considera definido en ℓ_∞ en lugar de en c_0?

8. Fijado $y \in \ell_1$, para cada $x \in c_0$ se define una sucesión Tx por

$$[Tx](n) = \sum_{k=n}^{\infty} x(k)y(k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Prueba que T es un operador lineal continuo de c_0 en sí mismo y calcula su norma.

9. En cada uno de los siguientes casos, prueba que la aplicación $f \mapsto T(f)$ es un operador lineal continuo de $C[0,1]$ en sí mismo y calcula su norma:

$$a)\ [Tf](x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad b)\ [Tf](x) = x^2 f(0), \quad c)\ [Tf](x) = f(x^2)$$

10. Dada una sucesión acotada $a \in \ell_\infty$, se define $T_a : \ell_1 \to \ell_1$ por $(T_a x)(n) = a(n)x(n)$ para todo $x \in \ell_1$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que:

    a) $T_a \in L(\ell_1)$ y $\|T_a\| = \|a\|_\infty$. Deduce que $L(\ell_1)$ contiene una copia isométrica de ℓ_∞.

    b) Prueba que si T_a es inyectivo entonces su imagen es densa en ℓ_1.

    c) Prueba que T_a es un isomorfismo topológico si, y sólo si, $\inf\{|a(n)| : n \in \mathbb{N}\} > 0$.

11. Sean $\{\mathrm{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ los vectores unidad en c_0. Prueba que, para $f \in c_0^*$, equivalen:

    a) f alcanza su norma.

    b) Existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(\mathrm{e}_n) = 0$ para todo $n \geqslant m$.

12. Sea $C[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $[0,1]$ con la norma

$$\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)|\,\mathrm{d}t \ \ (x \in C[0,1])$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por

$$\varphi_n(x) = n \int_0^{\frac{1}{n}} x(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \in C[0,1])$$

a) Prueba que φ_n es continuo y calcula su norma.

b) Prueba que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente al funcional lineal $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x) = x(0)$ para toda $x \in C[0,1]$. Prueba que φ es discontinuo.

13. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = t\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que T es un operador lineal continuo y calcula su norma.

14. Sea $\varphi : L_1[-1,1] \to \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por $\varphi(x) = \int_{-1}^1 tx(t)\,\mathrm{d}t$ para todo $x \in L_1[-1,1]$. Prueba que es continuo y calcula su norma.

15. Sea $X = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}$. Se considera en X la norma del máximo. Para cada $x \in X$ sea $\varphi(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$. Prueba que $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$ y φ no alcanza su norma.

16. Sea $\varphi : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$ definido por $\varphi(x) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\,\mathrm{d}t$. Prueba que φ es un funcional lineal continuo y calcula su norma.

17. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que T es un operador lineal continuo y $\|T\| \leqslant 1/\sqrt{2}$.

18. Dada una función $f \in C[a,b]$ se define un funcional lineal $\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \int_a^b f(t)x(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in C[a,b])$$

Prueba que $\|\varphi\| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Sugerencia.

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)| \frac{1+n|f(t)|}{1+n|f(t)|} = \int_a^b \frac{|f(t)|}{1+n|f(t)|} + \int_a^b f(t)\frac{nf(t)}{1+n|f(t)|} \leqslant \frac{b-a}{n} + \|\varphi\|.$$